

Serie di Fourier

Richiami di teoria

Data una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -periodica, limitata e integrabile su $[0, 2\pi]$.

Si associa a f la serie di Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

con

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Osservazione. I coefficienti si possono ottenere integrando su un periodo (=intervallo di lunghezza 2π) qualsiasi di f , ad esempio su $[-\pi, \pi]$.

Simmetrie.

$$f \text{ pari} \Rightarrow \begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \\ = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad \forall n \geq 0 \\ b_n = 0 \quad \forall n \geq 1, \end{cases}$$

$$f \text{ dispari} \Rightarrow \begin{cases} a_n = 0 \quad \forall n \geq 0 \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \\ = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Sia S_k la ridotta k -esima:

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

come converge S_k a f ?

Convergenza in media quadratica. Si ha

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} |S_k(x) - f(x)|^2 dx = 0,$$

da cui

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} |S_k(x)|^2 dx &= \int_0^{2\pi} f^2(x) dx, \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} S_k(x) dx &= \int_0^{2\pi} f(x) dx. \end{aligned}$$

Uguaglianza di Parseval. Si ha

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

Convergenza puntuale. Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

- è continua a tratti in $[0, 2\pi]$
- in x_0 ammette (finite)

la derivata destra $f'_+(x_0)$ e la derivata sinistra $f'_-(x_0)$, oppure

la pseudoderivata destra $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0^+)}{x - x_0}$

e la pseudoderivata sinistra $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0^-)}{x - x_0}$

allora S_k converge in x_0 a $\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$.

(oppure, Criterio di Dirichlet: f limitata e monotona a tratti).

Convergenza uniforme. Se $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ è C^1 a tratti su $[0, T]$,

- allora $\forall [a, b] \subset (0, T)$

$$S_k \rightarrow f \text{ uniformemente su } [a, b]$$

- se inoltre $f(0) = f(T)$, allora

$$S_k \rightarrow f \text{ uniformemente su } [0, T]$$

Osservazione. Se f è periodica con periodo $T > 0$, le formule diventano

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^{2\pi} f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^{2\pi} f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

e l'identità di Parseval è

$$\frac{2}{T} \int_0^T f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

e i risultati di convergenza valgono con ovvie modifiche.